САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Белицкая Анна Владимировна

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОТИВ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ ИГРОКОВ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012 г.

Работа выполнена на кафедре математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Петросян Леон Аганесович.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Печерский Сергей Львович, Факультет экономики ЕУСПб;
	кандидат физико-математических наук Ковшов Александр Михайлович, факультет прикладной математики-процессов управления СПбГУ.
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург).

Защита состоится «19» декабря 2012 г. в 16 час. на заседании совета Д.212.232.59 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Санкт-Петербургском государственном университете по адресу: 199034, г. Санкт-Петербург, В. О., Средний пр., д. 41/43, ауд. 511.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СПбГУ им. А. М. Горького по адресу: г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9.

Автореферат разослан «____»________________ 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Д. Ногин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Начиная с пятидесятых годов XX века, начинает развиваться теория дифференциальных игр, которая применяется при описании и исследовании экономических систем и процессов, а также процессов, происходящих в экологии, менеджменте и других сферах человеческой жизни. В различное время в развитие теории дифференциальных игр свой вклад внесли Р. Айзекс, Н.Н. Красовский, Л.А. Петросян, а также Н.Н. Данилов, Дж. Заккур, В.В. Захаров, Н.А. Зенкевич, В. И. Жуковский, С. Йоргенсен, А.Ф. Клейменов, А.Ф. Кононенко, А.В. Кряжимский, Д.В. Кузютин, В.Н. Лагунов, Ю.С. Осипов, Л.С. Понтрягин, В.В. Розен, Дж. А. Филлар, С.В. Чистяков, Д.В.К. Янг, Е.Б. Яновская и др.

Со временем стала развиваться теория кооперативных дифференциальных игр. Появляется важное требование — требование динамической устойчивости (временной состоятельности или состоятельности во времени) выбранного в игре принципа оптимальности, в соответствии с которым находится решение игры. Динамическая устойчивость означает, что в процессе реализации решения принцип оптимальности, который был выбран в начале игры, должен оставаться состоятельным в течение всей игры. Необходимо отметить, что почти всегда первоначально выбранное решение в ходе его реализации теряет свою оптимальность. Чтобы этого избежать необходимо специальным образом производить регуляризацию принципа оптимальности. Динамическая устойчивость подробно исследовалась в работе Л.А. Петросяна[1] (1977). Л.А. Петросян предложил производить регуляризацию принципа оптимальности перераспределением выигрыша в соответствии с "процедурой распределения дележа".

Еще одним важным свойством решений кооперативных дифференциальных игр является устойчивость против иррационального поведения игроков. В диссертационной работе исследуется условие устойчивости против иррационального поведения игроков. В процессе кооперативной игры может возникнуть ситуация, когда какой-либо игрок (или группа игроков) решат расторгнуть первоначально принятое кооперативное соглашение. Начиная с этого момента игроки начнут действовать каждый в своих интересах. Тогда участники должны быть уверены, что

[1] Петросян Л.А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. 1977. Вып. 14. є 19. С. 46-52.

в этом случае их затраты будут не выше, чем в случае изначального отсутствия кооперации. Условие, при котором игроки гарантируют себе при этом наихудшем сценарии (аннулирование кооперативного соглашения в процессе игры) затраты не выше, чем те, которые они получи ли бы, если с самого начала игры не кооперировались (не объединялись в максимальную коалицию), называется "условием устойчивости против иррационального поведения игроков"(условие Д.В.К. Янга[2]).

Условие Д.В.К. Янга выполняется редко. В диссертационной работе предлагается при кооперации распределять затраты в соответствии с динамически устойчивой процедурой распределения дележа. Это помогает в некоторых случаях достигать выполнения условия устойчивости против иррационального поведения игроков.

Исследуется модель экологического регулирования — модель сокращения вредных выбросов в атмосферу. В последнее время все больший интерес вызывают теоретико-игровые методы решения вопросов, связанных с многосторонними межгосударственными соглашениями. В модели сокращения вредных выбросов в атмосферу предприятия-загрязнители (страны) сами принимают активное участие в регулировании, в результате чего они существенно снижают объемы выбросов по сравнению с уровнем, установленным законодательством.

В работе рассматривается несколько вариантов игры сокращения вредных выбросов в атмосферу: с симметричными затратами, с несимметричными затратами и дифференциальная игра на сети. В первых двух случаях запас загрязнения, накопленного каким-либо игроком (страной), зависит от выбросов всех игроков, участвующих в игре.

Дифференциальная игра на сети предполпгает, что запас загрязнения, накопленного каким-либо игроком, может зависеть от выбросов не всех игроков, а только некоторых. Например, в силу направления ветра или удаленности стран друг от друга, можно пренебречь влиянием некоторых игроков друг на друга.

Целью диссертационной работы является изучение условия устойчивости против иррационального поведения игроков в случае, если при кооперации используется динамически устойчивая процедура распределения дележа (или выигрыша, если рассматриваются игры с нетрансферабельными выирышами). В диссертации

[2]Yeung D. W. K. An irrational - behavior - proofness condition in cooperative differential games // Intern. J. of Game Theory Rew. 2006. Vol. 8. P. 739–744.

рассматривалась задача сокращения вредных выбросов в атмосферу и проверялось условие устойчивости против иррационального поведения игроков для различных случаев игры, а также для различных принципов оптимальности.

Научная новизна работы.работы заключается в том, что в ней:

- предложено условие устойчивости против иррационального поведения игроков, в котором используется динамически устойчивая процедура распределения дележа;
- исследовано условие устойчивости против иррационального поведения игроков для кооперативных дифференциальных игр с нетрансферабельными выигрышами в случае, если используется динамически устойчивая процедура распределения выигрыша;
- определена и впервые исследована дифференциальная игра сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети.

Практическая ценность работы. Результаты, полученные в диссертации, представляют теоретический и практический интерес. Для описания и исследования экономических систем и процессов, а также процессов, происходящих в экологии, менеджменте и других сферах человеческой жизни, все чаще используются математические теоретико-игровые модели. Особый интерес представляют кооперативные дифференциальные игры и динамическая устойчивость их решений (то есть оптимальность в процессе всей игры решения, которое было выбрано в начале игры). Также важное практическое значение имеет условие, гарантирующее игрокам, объединенным в максимальную коалицию, защиту от иррационального поведения какого-либо игрока (или группы игроков), входящего в максимальную коалицию.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Математически формализовано условие устойчивости против иррационального поведения игроков, в котором при кооперации используется динамически устойчивая процедура распределения дележа. Доказана теорема о выполнении условия устойчивости против иррационального поведения игроков для игры сокращения вредных выбросов в атмосферу, в случае симметричных затрат, если была использована динамически устойчивая процедура рас-

пределения вектора Шепли. Выполнение аналогичного условия доказано в коалиционнай игре, где принципом оптимальности является PMS-вектор.

2. Математически формализовано условие устойчивости против иррационального поведения игроков для коалиций. Доказана теорема о том, что это условие выполнено для игры сокращения вредных выбросов в атмосферу, когда в качестве принципа оптимальности выбран динамически устойчивый вектор Шепли.

3. Для случая несимметричных затрат доказана теорема о выполнении условия устойчивости против иррационального поведения игроков в игре сокращения вредных выбросов в атмосферу, если была использована динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора. Для случая коалиционной игры доказано аналогичное условие, где, в качестве принципа оптимальности, рассматривается PMS-вектор.

4. Доказана теорема о том, что условие устойчивости против иррационального поведения игроков для игры с нетрансферабельными выгрышами выполняется для любого Парето-оптимального решения, если используется динамически устойчивая процедура распределения выигрыша.

5. Определена дифференциальная игра сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети. Найдено равновесие по Нэшу, минимальные издержки максимальной коалиции. Получена динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора. Получено ограничение на структуру сети, гарантирующее выполнение условия устойчивости против иррационального поведения игроков в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети, если используется динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора.

Апробация работы. Основные результаты, составляющие содержание работы, были представлены на III, V и VI Международных конференциях "Теория игр и менеджмент"GTM'09, GTM'11 и GTM'12 (Санкт-Петербург, 2009, 2011, 2012 гг.); на I Международной конференции "Chinese Game Theory and Experimental Economics Association"(Пекин, Китай, 2010); на VIII Международном симпозиуме "International Society of Dynamic Games"ISDG (Падова, Италия, 2011); на

Международной научной конференции "Математика, экономика, менеджмент: 100 лет со дня рождения Л.В. Канторовича"(Санкт-Петербург, 2012); на Международной конференции "Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics"CNSA-2012 (Санкт-Петербург, 2012). Кроме того, результаты докладывались на семинарах кафедры математической теории игр; на Международном семинаре "Scientific Publications. Qualitative Research Methods in Operations"(Санкт-Петербург, 2010 г.); на Всероссийской конференции "Устойчивость и процессы управления"(Санкт-Петербург, 2010 г.); на XLI и XLII научных конференциях аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость"(Санкт-Петербург, 2010 и 2011 гг.).

Публикации работы. По материалам диссертации опубликовано 11 работ, 2 из которых — в журналах, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертиции. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы (которые, в свою очередь, разбиты на подпараграфы), заключения и списка используемой литературы. Объем работы составляет 109 страниц. Список литературы включает 47 наименований.

Содержание работы

Во введении обсуждается актуальность темы диссертационного исследования и новизна полученных результатов, дан краткий обзор литературы по теме диссертации, сформулированы положения, выносимые на защиту, обоснованы теоретическая ценность и практическая значимость представленных в работе результатов. Также представлены основные понятия и определения, используемые в работе.

В первой главе рассматривается условие устойчивости против иррационального поведения игроков в дифференциальной кооперативной игре. Предлагается на кооперативном участке игры затраты распределять с помощью динамически устойчивой процедуры распределения дележа $\beta_i(t)$. Для дифференциальной игры с бесконечной продолжительностью, с дисконтированием, данное условие выглядит следующим образом:

$$V(x_0, t_0; \{i\}) \geq \int_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau - t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t-t_0)} V(x^I(t); \{i\}), \qquad i \in I, \tag{1}$$

где $V(x_0, t_0; \{i\})$ — издержки игрока i в равновесии по Нэшу, вычисленные в начальном состоянии x_0;

$V(x^I(t);\{i\})$ — аналогичные издержки, вычисленные в начальном состоянии $x^I(t)$ на кооперативной траектории.

Введем достаточное условие выполнения условия устойчивости против иррационального поведения игроков (1):

Теорема 1 Для того, чтобы условие устойчивости против иррационального поведения игроков, где на кооперативном участке игры используется динамически устойчивая процедура распределения дележа $\beta(\tau)$, было выполнено, достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\beta_i(\tau) \leq \frac{d}{d\tau} V(x^I(\tau);\{i\}) + \rho V(x^I(t);\{i\}), \qquad i = 1, ..., n.$$

В параграфе 1.3 рассматривается коалиционная игра. Вводится условие устойчивости против иррационального поведения игроков для произвольной коалиции S_k, если издержки на кооперативном участке игры распределяются с помощью динамически устойчивой процедуры распределения дележа $\beta_i(\tau)$:

$$V(x_0, t_0; \{S_k\}) \geq \sum_{i \in S_k} \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho(\tau - t_0)} \beta_i(\tau) d\tau + e^{-\rho(t - t_0)} V(x^I(t); \{S_k\}),$$

где $V(x_0, t_0; \{S_k\})$ минимальные издержки коалиции S_k, вычисленные в начальный момент x_0 за время $[t_0, +\infty)$, когда игроки, не входящие в коалицию S_k (то есть входящие в коалицию $I \backslash S_k$) действуют в соответствии со стратегиями, равновесными по Нэшу,
$V(x^I(t); \{S_k\})$ — подобные издержки, вычисленные в начальный момент на оптимальной кооперативной траектории $x^I(t)$ за время $[t, +\infty)$.

То есть коалиция S_k гарантирует себе, что даже при аннулировании кооперативного соглашения, она "понесет"меньшие затраты, чем в случае, когда кооперативное соглашение изначально не было принято.

Во второй главе рассматривается теоретико-игровая модель экологического регулирования — модель сокращения вредных выбросов в атмосферу, случай с симметричными затратами.

В параграфе описана постановка игровой задачи. $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — это множество игроков. $C_i(u_i)$ — это издержки на природоохранные мероприятия, которые несет игрок i, если он снижает выбросы до некоторого допустимого уровня u_i:

$$C_i(u_i(t)) = \frac{\gamma}{2}(u_i(t) - \bar{u}_i)^2, \qquad 0 \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \qquad \gamma > 0.$$

Предполагается выполненным условие:

$$\bar{u}_i \geq \frac{n\pi}{\gamma(\rho + \delta)}.$$

Пусть $D_i(x)$ — это затраты на возмещение ущерба от загрязнения:

$$D_i(x) = \pi x(t), \qquad \pi > 0.$$

Динамика загрязнения происходит в соответствии с дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i \in I} u_i(t) - \delta x(t), \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где δ — коэффициент, характеризующий долю поглощенного загрязнения.

Каждый игрок стремится минимизировать суммарные затраты на сокращение вредных выбросов и затраты, необходимые на возмещение ущерба от загрязнения. Таким образом, затраты игроков имеют следующий вид:

$$K_i(x_0, t_0, u) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}(C_i(u_i(t)) + D_i(x(t)))dt,$$

при условии (2), где $u = (u_1, \ldots, u_n)$ — это ситуация в игре, а δ — ставка дисконтирования.

Теорема 2 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков выполнено в задаче сокращения вредных выбросов в атмосферу, если на кооперативном участке игры для распределения кооперативных затрат используется динамически устойчивая процедура распределения вектора Шепли.

В параграфе 2.4.2 доказывается Теорема 2.

В разделе 2.5 рассматривается коалиционный вариант игры сокращения вредных выбросов в атмосферу с симметричными затратами. В качестве принципа оптимальности выбирается PMS-вектор[3], который строится в параграфе 2.5.1. Предполагается, что на первой стадии коалиции действуют в собственных интересах.

[3]Petrosyan L., Mamkina S. Dynamic games with coalitional structures // International Game Theory Review. 2006. Vol.8. N 2. P. 295-307.

На втором шаге выигрыш каждой коалиции делится между игроками по вектору Шепли, вычисленному для кооперативной игры внутри каждой коалиции. Векторы Шепли, вычисленные для каждой коалиции, образуют PMS-вектор.

Далее исследуется вопрос динамической устойчивости PMS-вектора. В параграфе 2.5.2 вычисляется динамически устойчивая процедура распределения PMS-вектора.

Теорема 3 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков выполнено в коалиционной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу, если на кооперативном участке игры для распределения кооперативных затрат используется динамически устойчивая процедура распределения PMS-вектора.

Теорема 3 доказывается в параграфе 2.5.3.

В последнем параграфе второй главы доказывается теорема о выполнении условия устойчивости против иррационального поведения игроков для коалиций в задаче сокращения вредных выбросов в атмосферу, если используется динамически устойчивая процедура распределения вектора Шепли.

В третьей главе исследуется модифицированная модель сокращения вредных выбросов в атмосферу. В параграфе 3.1 описана постановка задачи. Основным отличием данной модели является ассиметричность функций издержек игроков. Достигается она с помощью различных для каждого игрока i затрат на возмещение ущерба от загрязнения $D_i(x)$:

$$D_i(x) = \pi_i x(t), \qquad \pi_i > 0.$$

Издержки на природоохранные мероприятия, которые несет игрок i, если он снижает выбросы до некоторого допустимого уровня u_i имеют вид:

$$C_i(u_i) = \frac{\gamma}{2}(u_i - \bar{u}_i)^2, \qquad 0 \leq u_i(t) \leq \bar{u}_i, \qquad \gamma > 0.$$

Предполагается выполненным условие:

$$\bar{u}_i \geq \frac{\sum\limits_{i \in I} \pi_i}{\gamma(\rho + \delta)}.$$

В параграфе 3.2 рассматривается ES-вектор в качестве принципа оптимальности кооперативной игры. В параграфе 3.2.1 исследуется вопрос регуляризации ES-вектора. Вычисляется динамически устойчивая процедура распределения дележа.

Теорема 4 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков выполнено в задаче сокращения вредных выбросов в атмосферу с несимметричными затратами, если на кооперативном участке игры для распределения кооперативных затрат используется динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора.

Доказательство Теоремы 4 приводится в параграфе 3.2.2.

В разделе 3.3 рассматривается коалиционная игра сокращения вредных выбросов в атмосферу с несимметричными затратами. Строится характеристическая функция и PMS-вектор. Затем вычисляется динамически устойчивая процедура распределения PMS-вектора.

Теорема 5 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков выполнено в коалиционной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу с несимметричными затратами, если на кооперативном участке игры для распределения кооперативных затрат используется динамически устойчивая процедура распределения PMS-вектора.

В параграфе 3.3.4 приведено доказательство Теоремы 5.

В первых трех главах рассматриваются трансферабельные затраты.

Четвертая глава посвящена исследованию условия устойчивости против иррационального поведения игроков для игр с нетрансферабельными выигрышами. В качестве решения игры рассматривается Парето-оптимальное решение. В параграфе 4.1 вводится понятие динамически устойчивого Парето-оптимального решения.

Теорема 6 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков для любого Парето-оптимального решения в кооперативной дифференциальной игре с нетрансферабельными выигрышами выполнено для процедуры распределения выигрыша, удовлетворяющей неравенству:

$$\beta_i(t) \geq -\frac{d}{dt} w_i(x^*(t), [t, +\infty)) + \rho w_i(x^*(t), [t, +\infty)),$$

где $w_i(x^*(t), [t, +\infty))$ — некооперативный выигрыш игрока i с начальным состоянием на кооперативной траектории $x^*(t)$, на временном интервале $[t, +\infty)$.

Доказательство Теоремы 6 приводится в параграфе 4.2.

В параграфе 4.3 демонстрируется техника вычисления динамически устойчивой процедуры распределения выигрыша на примере игры сокращения вредных выбросов в атмосферу.

В пятой главе вводится дифференциальная сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу. Рассматривается произвольная сеть и частный случай — случай "круговой сети". Случаю "Круговая сеть"посвящены первые шесть параграфов пятой главы. В параграфе 5.1 описана постановка игровой задачи.

Игра представляет собой набор $\Gamma(I, L)$, где
$I = \{1, 2, \ldots, n\}$ — это множество игроков (предприятий), объединенных в сеть.

Узлами этой сети являются игроки из множества I.

Предположим, что игроки пронумерованы таким образом, что сеть состоит только из множества ребер L следующего вида:

$$\begin{cases} (i,\ i+1) \in L, \quad i \in I, \quad i \neq n, \\ (n,\ 1) \in L, \quad i = n. \end{cases} \tag{3}$$

Такую игру будем называть сетевой игрой кругового типа или круговой сетью.

Выбросы игрока i, $i = 1, 2, \ldots, n$ в момент времени t, $t \in [t_0, \infty)$, обозначим как $u_i(t)$.

Динамика накопления загрязнения за время t:

$$\begin{gathered} \dot{x}_i(t) = \frac{1}{4}u_{i-1} + \frac{1}{2}u_i + \frac{1}{4}u_{i+1} - \delta x_i(t), \\ x_i(t_0) = x_i^0, \end{gathered} \tag{4}$$

где δ — коэффициент, характеризующий долю поглощенного загрязнения.

Каждый игрок имеет свою собственную динамику накопленного загрязнения, в отличие от моделей, рассмотренных во второй и третьей главе. При этом динамика игрока $i, \quad i = 1, ..., n$ зависит не только от своих собственных выбросов,но и от выбросов соседних для него игроков. То есть от выбросов игроков $i-1$ и $i+1$. Предполагается, что игроки "замкнуты в круг". То есть, динамика накопленного загрязнения первого игрока зависит от выбросов последнего (n-го) и второго.

Таким образом, каждый игрок $i \in I, \quad i \neq 1, i \neq n$ имеет связь с игроками $i-1$ и $i+1$. Первый игрок имеет связь с игроком n и игроком 2. Игрок n имеет связь с игроками $n-1$ и 1.

В игре имеется два виде издержек, аналогичных издержкам в модели сокращения вредных выбросов в атмосферу, рассмотренным в главе 2:

$$C_i(u_i) = \frac{\gamma}{2}(u_i - \bar{u}_i)^2, \qquad 0 \le u_i \le \bar{u}_i, \qquad \gamma > 0.$$

Предполагается выполненным условие:

$$\bar{u}_i \ge \frac{\pi}{\gamma(\rho+\delta)}.$$

И издержки на возмещения ущерба от загрязнения:

$$D_i(x_i(t)) = \pi x_i(t), \qquad \pi > 0.$$

Функция затрат игрока i определяется следующим образом:

$$K_i(x_i, [t_0, +\infty), u_i) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\rho(t-t_0)}(C_i(u_i) + D_i(x_i(t)))dt, \quad i \in I.$$

В параграфе 5.1.1 найдено равновесие по Нэшу для дифференциальной игры на сети кругового типа. В параграфе 5.1.2 рассматривается кооперативная игра, минимизируются издержки максимальной коалиции. В следующих трех разделах исследуется динамическая устойчивость ES-вектора, в том числе вычисляется динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора:

$$\beta_i(t) = \pi x_i^I(t) + \frac{\pi^2}{2\gamma(\rho+\delta)^2}, \qquad i \in I.$$

Теорема 7 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков выполнено в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети кругового типа, если на кооперативном участке игры для распределения кооперативных затрат используется динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора.

Доказательство Теоремы 7 приводится в параграфе 5.1.5.

В разделе 5.2 вводится дифференцияльная игра сокращения вредных выбросов в атмосферу на произвольной сети.

Игра представляет собой набор $\Gamma(I, L)$, где
$I = \{1, 2, \dots, n\}$ — это множество игроков, объединенных в сеть.

Узлами этой сети являются игроки из множества I.

L — множество ребер $(i,\ j) \in L, \quad i \in I,\ j \in I$.

Основным отличием от сетевой игры сокращения вредных выбросов в атмосферу кругового типа является иной вид динамики накопления загрязнения игроком i.

Введем обозначения:
K_i — множество игроков, от которых зависит динамика накопленного загрязнения игроком i; в нашей модели K_i — это множество игроков, связанных дугой с игроком i,
M_i — это множество игроков, на которых влияет игрок i, то есть множество игроков, имеющих связь с игроком i,
m_j — количество игроков, динамика накопленного загрязнения которых зависит от выбросов игрока j, u_j, $|M_j| = m_j$, $M_j \neq \emptyset,\ j \in I$.

Динамика накопления загрязнения игроком i за время t определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{gathered} \dot{x}_i(t) = \sum_{j \in K_i} (u_j \frac{1}{2m_j}) + \frac{u_i}{2} - \delta x_i(t), \quad m_j \neq 0, \\ \dot{x}_i(t) = \frac{u_i}{2} - \delta x_i(t), \quad K_i = \emptyset, \\ x_i(t_0) = x_i^0. \end{gathered} \tag{5}$$

Ребро $(i,\ j) \in L$ в сетевой игре сокращения вредных выбросов, если динамика накопления загрязнения игроком i зависит от выбросов игрока j. Сеть является ориентированной, то есть если ребро $(i,\ j) \in L$, то из этого не следует, что ребро $(j,\ i) \in L$.

Издержки, рассматриваемые в модели имеют такой же вид, как и издержки, рассмотренные в игре сокращения вредных выбросов в атмосферу кругового типа. Суммарные затраты, которые стремится минимизировать каждый игрок, также определяются аналогично затратам в игре кругового типа.

В параграфе 5.2.1 рассматривается пример, иллюстрирующий правило построения динамик накопленного загрязнения для игроков, учавствующих в игре. В параграфе 5.2.2 строится равновесие по Нэшу некооперативной игры $u^N = [u_1^N, u_2^N,$

$\ldots, u_n^N]$:

$$u_i^N = \bar{u}_i - \frac{\pi}{2\gamma(\rho+\delta)}, \quad i \in I.$$

А соответствующие издержки в равновесии по Нэшу имеют вид:

$$F_i(x_i^N) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(\frac{\pi}{8\gamma(\rho+\delta)} + U_i^N + \rho x_i^N\Big),$$

где:

$$U_i^N = \sum_{j\in K_i}(\bar{u}_j\frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2}\bar{u}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\sum_{j\in K_i}(\frac{1}{m_j}) - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)},$$

а x_i^N — оптимальная некооперативная траектория игрока i (в равновесии по Нэшу).

Далее вычисляется кооперативное решение — минимизируются издержки максимальной коалиции.

Оптимальные стратегии максимальной коалиции имеют вид:

$$u_i^I = \bar{u}_i - \frac{\pi}{\gamma(\rho+\delta)}.$$

Минимальные издержки максимальной коалиции I равны:

$$F(I, x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(\sum_{i=1}^{n}\bar{u}_i - \frac{n\pi}{2\gamma(\rho+\delta)} + \rho\sum_{i=1}^{n}x_i^I\Big),$$

где x_i^I — оптимальная кооперативная траектория игрока i.

В разделе 5.2.4 определяется ES-вектор сетевой игры сокращения вредных выбросов в атмосферу $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)]$:

$$\begin{aligned}\xi_i(t) = \frac{\pi}{\rho(\rho+\delta)}\Big(U_i^N + \rho\Big(e^{-\delta(t-t_0)}x_i^0 + \frac{1}{\delta}\big(\sum_{j\in K_i}(\bar{u}_j\frac{1}{2m_j}) +\\ +\frac{1}{2}\bar{u}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\sum_{j\in K_i}\frac{1}{m_j} - \frac{3\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\big)\big(1 - e^{-\delta(t-t_0)}\big)\Big)\Big).\end{aligned} \tag{6}$$

где $x_i^I(t)$ — оптимальная кооперативная траектория игрока i.

Для этой игры исследуется вопрос регуляризации ES-вектора (6). Вычисляется динамически устойчивая процедура распределения этого решения $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \ldots, \beta_n(t))$ в параграфе 5.2.5:

$$\begin{aligned}\beta_i(t) = \pi\Big(e^{-\delta(t-t_0)}x_i^0 + \frac{1}{\delta}\Big(\sum_{j\in K_i}(\bar{u}_j\frac{1}{2m_j}) + \frac{1}{2}\bar{u}_i - \frac{\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\sum_{j\in K_i}\frac{1}{m_j} -\\ -\frac{3\pi}{4\gamma(\rho+\delta)}\Big)\Big(1 - e^{-\delta(t-t_0)}\Big)\Big) + \frac{\pi^2}{2\gamma(\rho+\delta)^2}, \quad i \in I.\end{aligned} \tag{7}$$

В параграфе 5.2.6 получено ограничение на структуру сети, гарантирующее выполнение условия устойчивости против иррационального поведения игроков в дифференциальной игре сокращения вредных выбросов в атмосферу на сети, если используется динамически устойчивая процедура распределения ES-вектора (7):

Теорема 8 Условие устойчивости против иррационального поведения игроков в сетевой игре сокращения вредных выбросов в атмосферу выполняется, когда на кооперативном участке игры используется динамически устойчивый ES-вектора и выполняется неравенство:

$$\sum_{j \in K_i} \frac{1}{m_j} \geq 1.$$

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Сетевая игра сокращения вредных выбросов в атмосферу // МТИП. Т. 4. Вып. 2. 2012. (в соавторстве с Л. А. Петросяном). С. 3-Ц13.

2. Коалиционное решение в задаче сокращения вредных выбросов // Изд-во СПбГУ. Вестник СПбГУ. серия 10. Выпуск 2. 2010. (в соавторстве с Л. А. Петросяном, Н.В. Козловской). С. 46–59.

Публикации в других изданиях

3. Динамическая устойчивость PMS-вектора в задаче сокращения вредных выбросов // Изд-во СПбГУ. Процессы управления и устойчивость, труды XLI международной конференции аспирантов и студентов. 2010. (в соавторстве с Н.В. Козловской). С. 612–617.

4. Условие Д.В.К. Янга для динамических игр с нетрансферабельными выигрышами // Изд-во СПбГУ. Процессы управления и устойчивость, труды XLII международной конференции аспирантов и студентов. 2011. (в соавторстве с Л. А. Петросяном). С. 496–502.

5. The D.W.K. Yeung Condition for Cooperative Differential Games with Nontransferable Payoffs // Graduate School of Management, Contributions to game theory and management, Volume V. 2012. P. 45–50.

6. D. W. K. Yeung's Condition for the coalitional solution of the game of pollution cost reduction // Graduate School of Management, Contributions to game theory and management, Vol. III. 2010. (в соавторстве с Н.В. Козловской). P. 171–181.

7. The detalization of the irrational behavior condition // Contributions to game theory and management. V. III. 2010. (в соавторстве с Л. А. Петросяном, Д.В.К. Янгом и В.В. Жуком). P. 431–440.

8. Network game of emission reduction // Тезисы докладов международной конференции "Конструктивный негладкий анализ и смежные вопросы". СПб.: Изд-во СПбГУ. 2012. (в соавторстве с Л. А. Петросяном). P. 29–30.

9. Условие Д.В.К. Янга для пропорционального решения в задаче сокращения вредных выбросов // Всероссийская конференция, посвященная 80-летию со Дня Рождения В.И. Зубова "Устойчивость и процессы управления". СПб.: ВВМ. 2010. (в соавторстве с Л. А. Петросяном). С. 150–151.

10. The Irrational Behavior Proof Condition for the Emission Reduction Game // Proceedings of the Eighth International ISDG Workshop. 2011.

11. Network Game of Pollution Cost Reduction // GAME THEORY AND MANAGEMENT. Collected abstracts of papers presented on the Sixth International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management, SPbU. 2012.